Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $(2-i)^2+i(4+i)=2$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$. Determinați numărul real m pentru care $(f\circ f)(m)=2m$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+1}-3\cdot 5^x=10$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mari sau egale cu 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(3,-2)$ și $C(2a,a)$, unde a este număr real nenul. Arătați că dreptele AB și OC sunt perpendiculare, pentru orice număr real nenul a.

5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=\sin x+4\cos\frac{x}{3}\sin\frac{2x}{3}$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & -1 & 2a \\ 1 & -2 & a \\ 1 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax-y+2az=0 \\ x-2y+az=0 \\ x+y+(1-a)z=0 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.

5p **c)** Pentru $a=-1$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2y^2-4(x+y)^2+1$.

5p **a)** Arătați că $0*1=-3$.

5p **b)** Arătați că $x*(-1)\le 2x$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m\le n$, pentru care $m*n=1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{5}-\ln\left(x^2+x+5\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x^2-9x}{5\left(x^2+x+5\right)}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are soluție unică.

2. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4x}{x^3+8}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2\left(x^3+8\right)f(x)\,dx=8$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^4 xf(x)\,dx = 4\ln 2$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x t\cdot f(t)\,dt\right)$.